ECOLE POLYTECHNIQUE

OPTION M'

CONCOURS D'ADMISSION 1978

# PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES ( 4 h )

$\mathcal{E}$ désigne l'espace vectoriel des applications de l'intervalle ouvert $]-1, +1[$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivables, et $E$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ constitué par les fonctions-polynomes. Pour $f \in \mathcal{E}$ et $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre $n$ de $f$ (pour $n = 0$, c'est $f$ elle-même ; et, pour $n = 1$, on emploie aussi la notation $f'$).

On rappelle que, pour qu'une partie $A$ d'un espace métrique soit compacte, il faut et il suffit que toute suite d'éléments de $A$ admette une sous-suite qui converge vers un élément de $A$. On rappelle aussi que, dans un espace vectoriel normé de dimension finie, une partie est compacte si, et seulement si, elle est bornée (c'est-à-dire contenue dans une boule) et fermée.

Pour traiter certaines questions, il peut être commode d'utiliser la suite $(g_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $E$, définie par

$$g_p(x) = \sum_{n=0}^{p} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$

## Partie I

I - 1°/ Vérifier que l'on définit une norme sur $E$ en associant à toute fonction-polynome $f$ le nombre

$$\| f \| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{| f^{(n)}(0) |}{n!}$$

(étant entendu que l'on pose $0! = 1$).

Dans la suite, $E$ est muni de cette norme.

I - 2°/ a) Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, l'application $f \longmapsto f^{(n)}(0)$ de $E$ dans $\mathbb{R}$ est linéaire et continue. Calculer sa norme.

b) Montrer que l'application $f \longmapsto f'$ de $E$ dans $E$ n'est pas continue.

.../...

I - 3°/ Montrer que E n'est pas complet.

I - 4°/ On définit sur E une relation d'ordre, notée $\prec$, en disant que l'on a $f \prec g$ si, et seulement si, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f^{(n)}(0) \leqslant g^{(n)}(0)$$

(il est inutile d'expliciter la vérification du fait qu'il s'agit d'une relation d'ordre).

Montrer que, quel que soit $f \in E$, le sous-ensemble de E constitué par les éléments g tels que l'on ait $f \prec g$ et celui constitué par les éléments h tels que l'on ait $h \prec f$ sont, l'un et l'autre, fermés.

I - 5°/ Etant donnés deux éléments f et g de E, tels que l'on ait $f \prec g$, on désigne par $[f, g]$ le sous-ensemble de E constitué par les éléments h tels que l'on ait $f \prec h \prec g$. Montrer que $[f, g]$ est compact.

I - 6°/ 0 désignant ici la fonction nulle sur $]-1, +1[$, soit $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E convergeant vers 0 et telle que, quel que soit $p \in \mathbb{N}$, on ait $0 \prec f_p$. Montrer que l'ensemble $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} [0, f_p]$ est compact.

## Partie II

Dans cette partie, on se propose de construire et d'étudier un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{S}$ contenant E, muni d'une norme prolongeant celle de E, complet et tel que tout élément de F soit adhérent à E.

On désigne par $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des suites de nombres réels, indexées sur $\mathbb{N}$. Pour $a \in \mathcal{S}$, le terme d'indice n de la suite $a$ sera désigné par $a_n$, c'est-à-dire que l'on a $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Lorsque l'on considérera une suite d'éléments de $\mathcal{S}$, l'indice sera placé, pour éviter des confusions, en position supérieure ; par exemple, une telle suite sera notée $(a^p)_{p \in \mathbb{N}}$ : pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a^p$ est une suite $(a^p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels.

On désigne par L le sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$ constitué par les suites $a$ telles que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ soit absolument convergente. L est muni de la norme définie par

$$\| a \| = \sum_{n=0}^{\infty} | a_n | .$$

/...

II - 1°/ Pour $a \in L$, on désigne par $\rho_a$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Calculer $\inf_{a \in L} \rho_a$.

II - 2°/ Vérifier que l'application $\varphi$ de L dans $\mathcal{E}$, associant à tout élément $a$ de L l'application

$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

de $]-1, +1[$ dans $\mathbb{R}$, est linéaire.

Dans la suite, on désigne par F le sous-espace vectoriel $\varphi(L)$ de $\mathcal{E}$ et l'on considère $\varphi$ comme une application de L dans F.

II - 3°/ Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel L sur l'espace vectoriel F et, pour $f \in F$, expliciter $\varphi^{-1}(f)$ à l'aide des dérivées de f.

Vérifier que E est contenu dans F et caractériser le sous-espace vectoriel $H = \varphi^{-1}(E)$ de L.

II - 4°/ Montrer que, quelle que soit la suite $(a^p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de L, convergeant vers un élément $a$ de L, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{p \to \infty} a_n^p = a_n \quad . \tag{1}$$

Trouver une suite $(a^p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de L et un élément $a$ de L tels que la relation (1) soit vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, sans qu'il y ait convergence de $(a^p)_{p \in \mathbb{N}}$ vers $a$.

II - 5°/ Montrer que L est complet.

II - 6°/ Dans la suite, F est muni de la norme $f \longmapsto \| f \|_F$, définie par

$$\| f \|_F = \| \varphi^{-1}(f) \| \quad .$$

Vérifier que la restriction de cette norme à E coïncide avec la norme définie sur E dans la partie I.

Montrer que F est complet et que tout élément de F est adhérent à E.

.../...

II - 7°/ Montrer que, quelle que soit la suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F, convergeant vers un élément f de F, les conditions suivantes sont satisfaites :

a) $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $]-1, +1[$ ;

b) quels que soient le sous-ensemble compact K de $]-1, +1[$ et l'entier $n \geqslant 1$, $(f_p^{(n)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f^{(n)}$ sur K.

Trouver une suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F, convergeant vers un élément f de F et telle que, quel que soit l'entier $n \geqslant 1$, $(f_p^{(n)})_{p\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $f^{(n)}$ sur $]-1, +1[$.

## Partie III

On définit sur L une relation d'ordre, notée encore $\prec$, en disant que l'on a $a \prec b$ si, et seulement si, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \leqslant b_n$. Et l'on se propose d'étudier des propriétés de convergence dans l'espace vectoriel normé L, faisant intervenir cette relation.

Pour $a \in L$, on note $|a|$ la suite $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

III - 1°/ Montrer que toute suite $(a^p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de L, croissante (c'est-à-dire telle que, quel que soit $p \in \mathbb{N}$, on ait $a^p \prec a^{p+1}$) et bornée en norme (c'est-à-dire telle que la suite $(\|a^p\|)_{p\in\mathbb{N}}$ soit majorée dans $\mathbb{R}$), converge.

III - 2°/ Dans cette question, on se donne une suite $(a^p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de L, satisfaisant aux conditions suivantes :

a) quel que soit $n \in \mathbb{N}$, la suite $(a_n^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ ;

b) la suite $(|a^p|)_{p\in\mathbb{N}}$ est majorée (c'est-à-dire qu'il existe $b \in L$ tel que, quel que soit $p \in \mathbb{N}$, on ait $|a^p| \prec b$).

Montrer que l'élément $a$ de $\delta$, défini par

$$a_n = \lim_{p\to\infty} a_n^p ,$$

appartient à L et que la suite $(a^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $a$.

.../...

III - 3°/ Dans cette question, on se donne deux éléments $a$ et b de L, tels que l'on ait $a < b$. Et l'on se propose de montrer que le sous-ensemble $[a, b]$ de L, constitué par les éléments c tels que l'on ait $a \prec c \prec b$, est compact.

Montrer d'abord que, quelle que soit la suite $(c^p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, b]$, il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, satisfaisant à la condition suivante : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, la suite

$$\left( c_n^{\mu_n(p)} \right)_{p\in\mathbb{N}} ,$$

où $\mu_n$ désigne l'application composée $\lambda_0 \circ \ldots \circ \lambda_n$, converge dans $\mathbb{R}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$d^p = c^{\mu_p(p)}$$

Montrer que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, la suite $(d^p)_{p\in\mathbb{N},\, p\geqslant n}$ est une sous-suite de la suite $\left( c^{\mu_n(p)} \right)_{p\in\mathbb{N},\, p\geqslant n}$ Montrer alors que la suite $(d^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de $[a, b]$. En déduire que $[a, b]$ est compact.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail